

LEMMA $\square$

Kurvendiskussion I

Polynomfunktionen Schritt für Schritt

Stufe: Matura

Contents

Bevor du loslegst	2
1 Grundlagen	3
1.1 Definitionsbereich	3
1.2 Symmetrie	3
1.3 Gleichungen lösen	4
1.4 Schnittpunkte mit den Achsen	5
2 Ableitung und besondere Punkte	6
2.1 Die Ableitung	6
2.2 Extrempunkte	7
2.3 Wendepunkte	8
3 Das Gesamtbild	9
3.1 Verhalten im Unendlichen	9
3.2 Zusammenfassung: die Begleitfunktion	10
4 Typische Fehler	11
Impressum	12

Bevor du loslegst

Mit diesem Skript möchte ich dir die Kurvendiskussion näherbringen. Mir ist dabei wichtig, dass du nicht nur weisst, *wie* man rechnet, sondern auch verstehst, *warum* die einzelnen Schritte funktionieren. Wer das Warum kennt, muss viel weniger auswendig lernen und kann auch dann weiterrechnen, wenn eine Aufgabe einmal anders aussieht als gewohnt.

Worum geht es überhaupt? Gegeben ist eine Funktion, zum Beispiel $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, und gesucht ist ihr Graph. Natürlich könnte man einfach viele Punkte ausrechnen und verbinden. Dann weiss man aber nie, ob man nicht gerade einen Hoch- oder Tiefpunkt übersehen hat. Die Kurvendiskussion ist der systematische Weg: Wir stellen der Funktion der Reihe nach einige Fragen, und jede Antwort liefert ein Stück des Graphen. Wir fragen, welche Zahlen wir überhaupt einsetzen dürfen (Definitionsbereich), ob der Graph symmetrisch ist, wo er die Achsen schneidet, wo er steigt und fällt, wo seine Hoch- und Tiefpunkte liegen, wo er seine Krümmung ändert und schliesslich, was für sehr grosse und sehr kleine x passiert.

In diesem Skript geht es um Polynomfunktionen. Damit du nicht ständig neue Funktionen kennenlernen musst, begleitet uns durch das ganze Skript dieselbe Funktion, nämlich

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Kapitel für Kapitel finden wir mehr über sie heraus, und am Ende setzen wir alles zu einem vollständigen Bild zusammen. Gebrochenrationale Funktionen und Exponentialfunktionen behandle ich in *Kurvendiskussion II*.

Definitionen und Sätze sind fortlaufend nummeriert. Am Schluss jedes Abschnitts fasse ich das Wichtigste in einem Kasten zusammen. Voraussetzen werde ich nur, dass du Terme umformen, Klammern ausmultiplizieren und quadratische Gleichungen lösen kannst. Alles andere erkläre ich hier.

Grundlagen

1.1 Definitionsbereich

Bevor man mit einer Funktion rechnet, sollte man wissen, welche Zahlen man überhaupt einsetzen darf. In den reellen Zahlen sind nämlich nicht alle Rechnungen erlaubt. Durch null zu teilen ist nicht möglich: $6 : 0$ müsste eine Zahl a sein mit $a \cdot 0 = 6$, und weil $a \cdot 0 = 0$ für jede Zahl gilt, gibt es so ein a nicht. Ebenso gibt es keine reelle Wurzel aus einer negativen Zahl, denn $\sqrt{-4}$ müsste eine Zahl a mit $a^2 = -4$ sein, während für jede reelle Zahl $a^2 \geq 0$ gilt. Schliesslich ist $\ln(x)$ die Zahl a mit $e^a = x$. Weil e^a immer positiv ist, ist der Logarithmus nur für $x > 0$ definiert.

Definition 1.1. Der *Definitionsbereich* $\mathbb{D}$ einer Funktion f ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die der Funktionsterm $f(x)$ berechnet werden kann.

Um den Definitionsbereich zu bestimmen, suche ich im Funktionsterm also nach Brüchen, Wurzeln und Logarithmen und schliesse alle x aus, für die ein Nenner null, ein Radikand negativ oder das Argument eines Logarithmus kleiner oder gleich null wird.

Unsere Begleitfunktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ enthält keinen Bruch, keine Wurzel und keinen Logarithmus, sondern nur Addition, Subtraktion und Multiplikation. Diese Rechnungen sind für jede reelle Zahl möglich, also gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Das ist bei jeder Polynomfunktion so.

Bei anderen Funktionen muss man genauer hinschauen. Bei $g(x) = \frac{1}{x-2}$ wird der Nenner für $x = 2$ null, also ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Bei $h(x) = \sqrt{x+3}$ muss $x+3 \geq 0$ gelten, also $x \geq -3$, und man schreibt $\mathbb{D} = [-3, \infty)$. Bei $k(x) = \ln(2-x)$ muss $2-x > 0$ sein, also ist $\mathbb{D} = (-\infty, 2)$. Eine eckige Klammer bedeutet dabei, dass die Grenze dazugehört, eine runde, dass sie nicht dazugehört. Bei ∞ steht immer eine runde Klammer, weil ∞ keine Zahl ist.

Das Wichtigste

- Ausschiessen muss man: Nenner = 0, Radikand < 0 , Argument des Logarithmus ≤ 0 .
- Für jede Polynomfunktion gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

1.2 Symmetrie

Ist ein Graph symmetrisch, genügt es, eine Hälfte zu untersuchen, denn die andere erhält man durch Spiegeln. Für uns sind zwei Arten von Symmetrie wichtig: die Spiegelung an der y -Achse und die Drehung um 180° um den Ursprung.

Definition 1.2. Mit jedem $x \in \mathbb{D}$ liege auch $-x$ in $\mathbb{D}$. Die Funktion f heisst *achsensymmetrisch zur y -Achse*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, und *punktsymmetrisch zum Ursprung*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt.

Um die Symmetrie zu prüfen, ersetze ich in $f(x)$ jedes x durch $(-x)$, und zwar mit Klammern. Dann vereinfache ich, wobei $(-x)^n = x^n$ für gerades und $(-x)^n = -x^n$ für ungerades n gilt, und

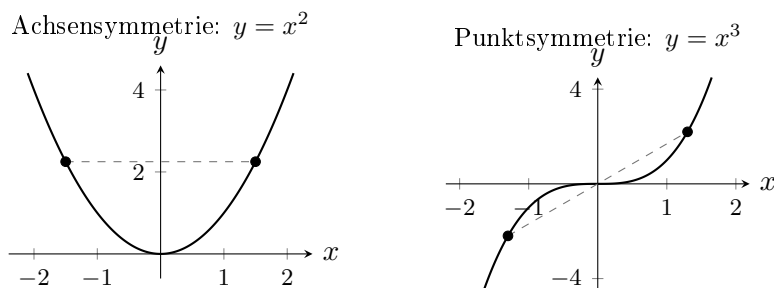
vergleiche das Ergebnis mit $f(x)$ und mit $-f(x)$. Für die Begleitfunktion erhalte ich

$$f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x.$$

Das ist weder $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ noch $-f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$. Die Begleitfunktion ist also weder achsen- noch punktsymmetrisch.

Bei Polynomen kommt es dabei nur auf die Exponenten an: Gerade Exponenten schlucken das Minuszeichen, ungerade lassen es stehen. Bei anderen Funktionen muss man $f(-x)$ dagegen immer ausrechnen. Übrigens kann eine Funktion nicht beides zugleich sein, ausser sie ist überall null: Aus $f(-x) = f(x)$ und $f(-x) = -f(x)$ folgt $f(x) = -f(x)$, also $f(x) = 0$.

Zum Schluss zwei Beispiele, bei denen eine Symmetrie vorliegt. Beim Graphen von $y = x^2$ liegen die Punkte bei $x = 1.5$ und $x = -1.5$ gleich hoch, der Graph ist an der y -Achse gespiegelt. Beim Graphen von $y = x^3$ liegt der Punkt bei $x = -1.3$ genau so tief, wie der Punkt bei $x = 1.3$ hoch liegt. Dreht man diesen Graphen um 180° um den Ursprung, sieht er wieder gleich aus.



Das Wichtigste

Bei Polynomfunktionen genügt ein Blick auf die Exponenten von x :

- nur gerade Exponenten $\Rightarrow$ achsensymmetrisch, z. B. $x^4 - 3x^2 + 7$,
- nur ungerade Exponenten $\Rightarrow$ punktsymmetrisch, z. B. $2x^5 - x$,
- gerade und ungerade gemischt $\Rightarrow$ keine dieser Symmetrien.

Eine Konstante zählt als gerader Exponent, denn $7 = 7x^0$.

1.3 Gleichungen lösen

In der Kurvendiskussion muss man immer wieder Gleichungen lösen, etwa um Nullstellen oder Extremstellen zu finden. Bevor wir die Schnittpunkte unserer Begleitfunktion bestimmen, stelle ich deshalb die drei Werkzeuge vor, die man dafür am häufigsten braucht. Wo sie bei unserer Begleitfunktion zum Einsatz kommen, sieht man dann im nächsten Abschnitt.

Das wichtigste Werkzeug ist das *Ausklammern*. Es beruht auf einem Satz, der fast selbstverständlich klingt.

Satz 1.3 (Satz vom Nullprodukt). *Für reelle Zahlen a und b gilt $a \cdot b = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$.*

Gelingt es, eine Gleichung in die Form „Produkt = 0“ zu bringen, zerfällt sie also in mehrere einfachere Gleichungen. Deshalb klammere ich immer zuerst aus, was sich ausklammern lässt.

Das zweite Werkzeug ist die *Mitternachtsformel* für quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$

mit $a \neq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Zahl $D = b^2 - 4ac$ unter der Wurzel heisst *Diskriminante*. Ist $D > 0$, gibt es zwei Lösungen, ist $D = 0$, gibt es genau eine, und ist $D < 0$, gibt es keine reelle Lösung. Manchmal erkennt man auch direkt eine binomische Formel, dann geht es schneller.

Das dritte Werkzeug ist die *Substitution*. Kommen in einer Gleichung nur x^4 , x^2 und eine Konstante vor, setze ich $u = x^2$ und erhalte eine quadratische Gleichung. Nach dem Lösen setze ich wieder $x^2 = u$ ein. Ein negatives u liefert dabei keine Lösung, weil $x^2 \geq 0$ ist.

Das Wichtigste

- Zuerst ausklammern, dann den Satz vom Nullprodukt anwenden.
- Quadratische Gleichung: Mitternachtsformel oder binomische Formel.
- Nur x^4 , x^2 und Konstante: Substitution $u = x^2$.

1.4 Schnittpunkte mit den Achsen

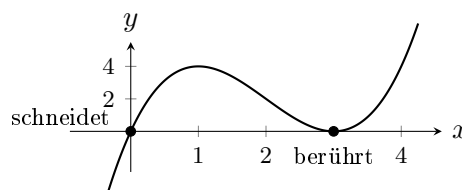
Auf der y -Achse gilt $x = 0$, der Schnittpunkt mit der y -Achse ist also einfach $S_y(0 \mid f(0))$. Auf der x -Achse gilt $y = 0$. Die Schnittpunkte mit der x -Achse, die sogenannten *Nullstellen*, findet man deshalb, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ löst.

Bei der Begleitfunktion ist $f(0) = 0$, der Graph geht also durch den Ursprung. Für die Nullstellen brauche ich zwei der Werkzeuge aus dem letzten Abschnitt: Zuerst klammere ich x aus, dann erkenne ich in der Klammer die binomische Formel $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2 = 0.$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist also $x = 0$ oder $x = 3$, und die Nullstellen sind $N_1(0 \mid 0)$ und $N_2(3 \mid 0)$.

Interessant ist der Faktor $(x - 3)$, der im Quadrat vorkommt. Man nennt $x = 3$ deshalb eine *doppelte Nullstelle*. Weil $(x - 3)^2$ für $x \neq 3$ positiv ist und auch x in der Nähe von 3 positiv ist, ist $f(x)$ links und rechts von 3 positiv. Der Graph wechselt dort also nicht die Seite, sondern berührt die x -Achse nur. Bei der einfachen Nullstelle $x = 0$ wechselt f dagegen das Vorzeichen, und der Graph schneidet die Achse.



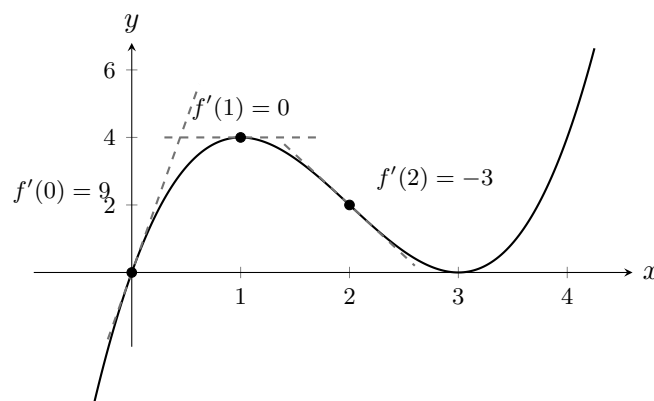
Das Wichtigste

- y -Achse: $S_y(0 \mid f(0))$. x -Achse: $f(x) = 0$ lösen.
- Einfache Nullstelle: Der Graph schneidet die x -Achse.
- Doppelte Nullstelle: Der Graph berührt die x -Achse.

Ableitung und besondere Punkte

2.1 Die Ableitung

Stell dir vor, du fährst mit dem Velo von links nach rechts über den Graphen. Mal geht es steil bergauf, mal bergab, und an manchen Stellen ist es für einen Moment flach. Genau das beschreibt die *Ableitung* $f'(x)$: Sie gibt an jeder Stelle x die Steigung der *Tangente* an, also der Geraden, die den Graphen dort berührt.



Ist $f'(x) > 0$ für alle x eines Intervalls, so steigt f dort, ist $f'(x) < 0$, so fällt f . Ist $f'(x_0) = 0$, so ist die Tangente an der Stelle x_0 waagrecht. Im Bild sieht man das an drei Stellen der Begleitfunktion: Bei $x = 0$ geht es mit der Steigung 9 steil bergauf, bei $x = 1$ ist die Tangente waagrecht, und bei $x = 2$ fällt der Graph mit der Steigung -3 .

Mathematisch ist die Ableitung als Grenzwert definiert. Man legt eine Gerade durch zwei Punkte des Graphen und lässt den zweiten Punkt immer näher an den ersten rücken, bis aus der Geraden die Tangente wird:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Für Polynome muss man diesen Grenzwert aber nicht selbst berechnen, denn es gibt einfache Regeln.

Satz 2.1 (Ableitungsregeln für Polynome). Für $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x^n)' = n x^{n-1}, \quad (c \cdot g(x))' = c \cdot g'(x), \quad (g(x) + h(x))' = g'(x) + h'(x), \quad c' = 0.$$

Der Exponent wird also zum Faktor, und der neue Exponent ist um eins kleiner. Eine Konstante hat die Ableitung null, weil sich ihr Wert nie ändert.

Leitet man f' noch einmal ab, erhält man die *zweite Ableitung* f'' . Sie beschreibt, wie sich die Steigung verändert, und wird bei den Extrem- und Wendepunkten wichtig. Entsprechend ist f'''

die dritte Ableitung. Für die Begleitfunktion leite ich Summand für Summand ab:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\f''(x) &= 6x - 12 \\f'''(x) &= 6\end{aligned}$$

Das Wichtigste

- $f'(x)$ ist die Steigung der Tangente an der Stelle x .
- $f' > 0$: Graph steigt. $f' < 0$: Graph fällt. $f' = 0$: waagrechte Tangente.
- $(x^n)' = n x^{n-1}$, Konstanten fallen beim Ableiten weg.

2.2 Extrempunkte

Ein *Hochpunkt* ist ein Punkt, der höher liegt als alle Punkte in seiner Nähe, ein *Tiefpunkt* liegt entsprechend tiefer. Zusammen nennt man sie *Extrempunkte*. An einem Hochpunkt geht der Graph von bergauf zu bergab über, und genau dort ist die Tangente waagrecht. An einer Extremstelle x_0 gilt also $f'(x_0) = 0$.

Diese Bedingung allein genügt aber nicht, denn eine waagrechte Tangente gibt es auch an Stellen, an denen der Graph nur kurz flach wird (ein Beispiel dazu folgt am Schluss des Abschnitts). Man braucht deshalb ein zusätzliches Kriterium, und das liefert die zweite Ableitung.

Satz 2.2 (Extremstellen). *Sei f zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$. Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f bei x_0 einen Hochpunkt. Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f bei x_0 einen Tiefpunkt. Ist $f''(x_0) = 0$, macht der Satz keine Aussage.*

Warum gilt das? Die zweite Ableitung f'' ist die Ableitung von f' . Ist $f''(x_0) < 0$, so nimmt die Steigung bei x_0 ab. Weil sie bei x_0 gerade null ist, ist sie links davon positiv und rechts davon negativ. Der Graph steigt also zuerst und fällt danach, und das ist ein Hochpunkt. Für $f''(x_0) > 0$ ist es genau umgekehrt.

Für die Begleitfunktion gehe ich in drei Schritten vor. Zuerst löse ich $f'(x) = 0$, dann prüfe ich jede Lösung mit f'' , und zum Schluss berechne ich die y -Koordinaten mit der Funktion f selbst, nicht mit f' oder f'' :

$$\begin{aligned}f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 &\iff x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3 \\f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 &\Rightarrow \text{Hochpunkt,} \quad f(1) = 1 - 6 + 9 = 4 \\f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 &\Rightarrow \text{Tiefpunkt,} \quad f(3) = 27 - 54 + 27 = 0\end{aligned}$$

Die Extrempunkte sind also $H(1 \mid 4)$ und $T(3 \mid 0)$. Der Tiefpunkt liegt genau auf der doppelten Nullstelle, dort, wo der Graph die x -Achse berührt.

Man sollte sich dabei bewusst sein, dass ein Hochpunkt nur höher liegt als die Punkte in seiner Nähe, nicht unbedingt höher als alle Punkte des Graphen. Bei der Begleitfunktion ist zum Beispiel $f(5) = 20 > 4 = f(1)$. Genauer spricht man deshalb von einem *lokalen* Maximum oder Minimum.

Zum Schluss noch das versprochene Beispiel, das zeigt, warum $f'(x_0) = 0$ allein nicht genügt. Bei $g(x) = x^3$ ist $g'(x) = 3x^2$, also $g'(0) = 0$. Für alle $x \neq 0$ ist aber $g'(x) = 3x^2 > 0$, der

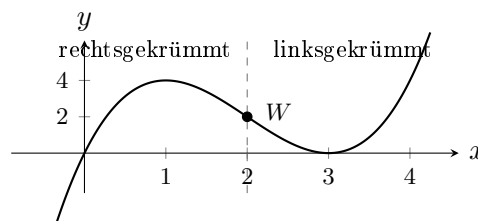
Graph von g steigt also links und rechts von 0. Bei $x = 0$ wird er nur kurz flach und steigt dann weiter, ein Extrempunkt liegt dort nicht vor. Der Satz liefert hier auch kein falsches Ergebnis, denn wegen $g''(0) = 0$ macht er keine Aussage.

Das Wichtigste

- Extremstellen: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.
- $f''(x_0) < 0$: Hochpunkt. $f''(x_0) > 0$: Tiefpunkt.
- Die y -Koordinate berechnet man immer mit f , nie mit f' oder f'' .

2.3 Wendepunkte

Fährst du mit dem Velo über den Graphen der Begleitfunktion, lenkst du zuerst nach rechts, über den Hochpunkt, und später nach links, durch den Tiefpunkt. Irgendwo dazwischen wechselst du vom Rechts- zum Linkslenken. Diese Stelle heisst *Wendepunkt*.



Definition 2.3. Gilt $f''(x) < 0$ auf einem Intervall, so heisst der Graph dort *rechtsgekrümmt*, gilt $f''(x) > 0$, so heisst er *linksgekrümmt*. Ein *Wendepunkt* ist ein Punkt, an dem sich die Krümmung ändert.

Dass die Krümmung gerade mit f'' zusammenhängt, ist kein Zufall. Bei einer Rechtskurve nimmt die Steigung ab, also ist $f'' < 0$, bei einer Linkskurve nimmt sie zu, also ist $f'' > 0$. Am Wendepunkt wechselt f'' deshalb das Vorzeichen.

Satz 2.4 (Wendestellen). Sei f dreimal differenzierbar. Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.

Bei der Begleitfunktion rechne ich genauso wie bei den Extrempunkten:

$$\begin{aligned} f''(x) = 6x - 12 = 0 &\Rightarrow x = 2 \\ f'''(2) = 6 \neq 0 &\Rightarrow \text{Wendestelle,} \quad f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \end{aligned}$$

Der Wendepunkt ist also $W(2 \mid 2)$. Er liegt genau in der Mitte zwischen $H(1 \mid 4)$ und $T(3 \mid 0)$.

Ein Polynom kann übrigens auch mehrere Wendepunkte haben, genauso wie es mehrere Hoch- und Tiefpunkte haben kann.

Das Wichtigste

- $f'' < 0$: rechtsgekrümmt. $f'' > 0$: linksgekrümmt.
- Wendestellen: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Das Gesamtbild

3.1 Verhalten im Unendlichen

Nachdem wir wissen, was im mittleren Bereich passiert, bleibt die Frage, wohin der Graph läuft, wenn x sehr gross oder sehr klein wird. Bei Polynomen entscheidet darüber der Summand mit dem höchsten Exponenten. Das sieht man am besten, wenn man ihn ausklammert:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right).$$

Für $x \rightarrow \pm\infty$ gehen $\frac{6}{x}$ und $\frac{9}{x^2}$ gegen null, die Klammer geht also gegen 1, und das Verhalten von f wird allein von x^3 bestimmt. Schon bei $x = 100$ sieht man das deutlich: $x^3 = 1\,000\,000$, aber $6x^2 = 60\,000$ und $9x = 900$.

Man schreibt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und meint damit, dass $f(x)$ beliebig gross wird, wenn x beliebig gross wird. Das Symbol ∞ ist dabei keine Zahl, sondern steht für „über jede Grenze hinaus“. Weil x^3 für grosse positive x positiv und für grosse negative x negativ ist, gilt für die Begleitfunktion $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Der Graph kommt also von links unten und verläuft nach rechts oben.

Daraus ergibt sich auch die Übersicht im Kasten. Für $x \rightarrow \infty$ wird jede Potenz x^n mit $n \geq 1$ beliebig gross. Für $x \rightarrow -\infty$ kommt es auf den Exponenten an: Bei geradem n ist x^n positiv, zum Beispiel $(-10)^2 = 100$, und wird beliebig gross. Bei ungeradem n ist x^n negativ, zum Beispiel $(-10)^3 = -1000$, und wird beliebig klein. Ein positiver Koeffizient a ändert an diesem Verhalten nichts, ein negativer kehrt das Vorzeichen um.

Das Wichtigste

Massgebend ist der Summand $a x^n$ mit dem höchsten Exponenten n :

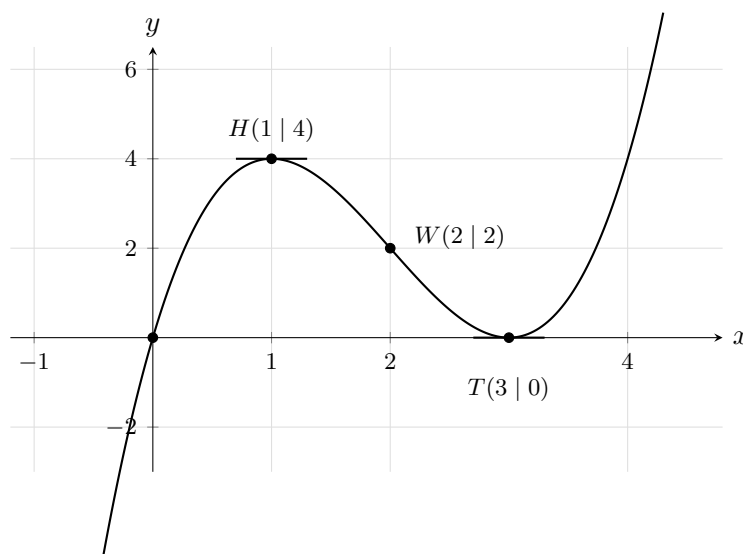
n	a	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow \infty$
gerade	$a > 0$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
gerade	$a < 0$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
ungerade	$a > 0$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
ungerade	$a < 0$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$

3.2 Zusammenfassung: die Begleitfunktion

Damit haben wir alle Fragen beantwortet, die wir zu Beginn an die Begleitfunktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ gestellt haben. Es lohnt sich, die Ergebnisse noch einmal zusammenzutragen, weil erst jetzt sichtbar wird, wie gut sie zusammenpassen.

Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Symmetrie	keine
Schnittpunkte	$S_y(0 0)$, $N_1(0 0)$, $N_2(3 0)$ (doppelt)
Ableitungen	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $f'''(x) = 6$
Extrempunkte	$H(1 4)$, $T(3 0)$
Wendepunkt	$W(2 2)$
Verhalten im Unendlichen	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Der Graph kommt von links unten, schneidet die x -Achse im Ursprung und steigt bis zum Hochpunkt $H(1 | 4)$. Danach fällt er, am steilsten im Wendepunkt $W(2 | 2)$, wo er von einer Rechts- in eine Linkskurve übergeht. Im Tiefpunkt $T(3 | 0)$ berührt er die x -Achse, ohne sie zu durchqueren, das ist die doppelte Nullstelle. Von dort steigt er wieder und verläuft nach rechts oben. Beim Zeichnen trage ich zuerst alle Punkte ein und markiere bei H und T mit kurzen waagrechten Strichen, dass dort die Tangente waagrecht ist. Erst dann ziehe ich die Kurve. Wenn ich unsicher bin, helfen ein, zwei zusätzliche Funktionswerte, hier etwa $f(-1) = -16$ und $f(4) = 4$.



Das Wichtigste: das Rezept

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. Definitionsbereich | 5. Extrempunkte: $f' = 0$, dann f'' |
| 2. Symmetrie | 6. Wendepunkte: $f'' = 0$, dann f''' |
| 3. Schnittpunkte mit den Achsen | 7. Verhalten im Unendlichen |
| 4. Ableitungen f' , f'' , f''' | 8. Graph zeichnen |

Typische Fehler

Diese Fehler sehe ich bei der Kurvendiskussion immer wieder:

1. **Jede Lösung von $f'(x) = 0$ ist eine Extremstelle.**
Falsch, jede Lösung muss mit f'' geprüft werden. Bei x^3 ist $f'(0) = 0$, aber dort liegt kein Extrempunkt.
2. **Durch x teilen.**
Dabei geht die Lösung $x = 0$ verloren. Immer ausklammern: $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0$.
3. **Die y -Koordinate mit f' oder f'' berechnen.**
Die y -Koordinate kommt immer aus f .
4. **Bei $f(-x)$ die Klammern vergessen.**
 $(-x)^2 = x^2$, aber $-x^2 = -(x^2)$. Also $(-x)$ immer mit Klammern einsetzen.
5. **Doppelte Nullstelle wie eine einfache zeichnen.**
Bei einer doppelten Nullstelle berührt der Graph die x -Achse nur und schneidet sie nicht.

Impressum

LEMMA ◻

Titel Kurvendiskussion I – Polynomfunktionen Schritt für Schritt
Stufe Matura
Reihe Analysis
Autor Tristan Kappeler
Kontakt Instagram: @lemma.mathe
Version 1.0 (Oktober 2026)

© 2026 Tristan Kappeler. Alle Rechte vorbehalten.

Dieses Skript ist kostenlos. Du darfst es gerne weitergeben, solange es unverändert und kostenlos bleibt. Verkauf sowie Weitergabe in veränderter Form sind nicht gestattet.

Dieses Skript wurde mit grösster Sorgfalt erstellt und geprüft. Trotzdem kann ich keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernehmen. Jede Haftung für Schäden, die aus der Verwendung des Skripts entstehen, insbesondere für Prüfungsergebnisse, ist ausgeschlossen.

Solltest du einen Fehler finden, freue ich mich über eine Nachricht.